MA2: Examen de Math L1 MASS du 17/5/2013
12h00-15h00, 226C, 4C, 227C

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits et doivent être rangés.

Exercice I:

1) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (-2x + 5y - 2z, -3x + 6y - 3z, -x + y - z)$$

a) Donnez la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.
b) Calculez A^2.
c) Donnez une base du noyau de A^2.

2) a) Quel est le rang de f?

3) a) Donnez une base du noyau de la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4) a) En déduire que $(\ker f) \cap \ker(f - 3id) = \{0\}$.
b) A t'on $\mathbb{R}^3 = (\ker f) \oplus \ker(f - 3id)$?

5) On considère les vecteurs de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$u_0 = (1, 1, 0), u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (-1, 1, 3)$$

a) Montrez que (u_0, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Quelle est la matrice P de passage de la base canonique à la base u_0, u_1, u_2?
c) Déterminez en fonction de (u_0, u_1, u_2) les images par f des vecteurs (u_0, u_1, u_2).
d) En déduire sans calculer P^{-1} la valeur de $B = P^{-1}.A.P$.

6) a) Quel est l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

7) On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculez C^2.
b) Calculez C^n pour $n \geq 0$

8) a) Expliquez comment obtenir A^n à partir de B^n. (On fera le calcul dans la question suivante)
b) Calculez A^n.

Exercice II:

1) a) Donnez le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction:

$$(x + 1).\sqrt{1 + x^2}$$

b) Montrez qu'il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que l'on ait l'égalité

$$F(x) = \frac{(x+1).\sqrt{1+x^2}}{\cos x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{3} + x^4\epsilon(x)$$

2) On considère un paramètre réel a.

a) Donnez le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction:

$$G(x) = \frac{(\sin(x))^2}{1-x} + a.x$$

b) Dans le cas où a est nul, étudiez la courbe paramétrée $M(x) := (F(x), G(x))$ au voisinage de $x = 0$. (On précisera les coordonnées du point $M(0)$ ainsi que la tangente à la courbe en ce point. On fera aussi un dessin local)

c) Dans le cas où $a = 1$, étudiez la courbe paramétrée $M(x) := (F(x), G(x))$ au voisinage de $x = 0$. On fera aussi un dessin local.

Exercice III:

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Donnez la décomposition en éléments simples de

$$\frac{4x^5 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3(x-1)(x^2+1)}$$

2) En utilisant un changement de variable du type $t = \tan(\frac{x}{2})$ donnez une primitive de:

$$\frac{\sin(x) + 1}{\cos(x) + 1}$$

Exercice IV:

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre l'équation différentielle:

$$x.y' + \frac{y}{2} = \sqrt{x}.e^x$$

2) Résoudre l'équation différentielle:

$$y'' - 5y' + 4y = (x+1).e^x$$